



POLITECNICO DI MILANO

IV Facoltà di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Laboratorio Progettuale di Calcolo Strutturale
Prof. Michele Carboni

A 3D wireframe model of a complex truss structure, likely a bridge or a large industrial frame, composed of interconnected beams and nodes. The structure is rendered in a light gray color with a fine grid pattern on the beams.

Analisi FEM di un telaio di contrasto per elementi ferroviari

Milani Damiano

Indice

Il telaio	3
Obiettivi dell'analisi	3
Analisi statica: elementi monodimensionali.....	6
Il modello	6
I vincoli.....	7
I carichi	7
La mesh.....	8
Analisi dei risultati	9
Analisi statica: elementi shell	11
Il modello	11
I vincoli.....	11
I carichi	12
La mesh.....	13
Analisi dei risultati	14
Analisi dinamica.....	16
Il modello	16
I vincoli.....	17
La mesh.....	17
Analisi dei risultati	17
Validazione dei risultati	19

Il telaio

Nella presente analisi verrà esaminato un telaio di contrasto, concepito per l'esecuzione di prove su carrelli ferroviari; una realizzazione di tale struttura è situata nei laboratori del Dipartimento di Ingegneria Meccanica presso il Politecnico di Milano.

Si tratta di una travatura di notevoli dimensioni ($8400 \times 10200 \times 6300 \text{ mm}$), la cui configurazione portante è costituita da tre portali collegati tra loro tramite vari longheroni; per garantire un ulteriore irrigidimento del telaio sono presenti anche dei tiranti precaricati. Il tutto poggia a terra su un basamento in ghisa.

Le travi che compongono la struttura sono in acciaio da costruzione *Fe510B* e *C40* ($E = 206 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $G = 79.3 \text{ GPa}$).

Esse presentano varie sezioni: a *C*, a *I* e circolare (nei tiranti) mentre per le arcate si riscontra una geometria particolare, simile a quella delle travi a doppia *T*, se non per il fatto che il nucleo è cavo e sono presenti nervature (si veda più avanti). I diversi elementi costruttivi sono assemblati o per mezzo di saldature o tramite piastre bullonate.



I diversi elementi costruttivi sono assemblati o per mezzo di saldature o tramite piastre bullonate.

L'elemento su cui vengono eseguite le prove è solitamente posto nel mezzo dei traversi inferiori e viene sollecitato con carichi lungo le tre direzioni per mezzo di quattro attuatori idraulici. Questi sono collegati al telaio tramite piastre bullonate, due nelle direzioni orizzontali e due in direzione verticale. Controllando opportunamente questi pistoni è possibile quindi eseguire categorie di test di tipo dinamico, oltre che statico.

Obiettivi dell'analisi

Lo scopo che si vuole perseguire sarà pertanto quello di studiare dapprima il comportamento del telaio in risposta a sollecitazioni statiche, per poi passare alla ricerca dei modi di vibrare della struttura. Il metodo di cui ci si servirà per raggiungere questi obiettivi è quello agli elementi finiti: grazie al FEM si potrà dare una soluzione numerica al problema in analisi.

Da notare che tale metodo è per sua natura un metodo numerico *approssimato*, molto potente e versatile ma anche di non immediata interpretazione; pertanto è essenziale un'analisi critica dei risultati che si otterranno. Un possibile criterio di validazione delle conclusioni potrebbe essere quello di un confronto con misure sperimentali (rilevate tramite opportuna strumentazione applicata sul prototipo, che nel caso in esame è disponibile). Importante è anche avere *a priori* un'idea di massima sulla risposta della struttura, di modo da non farsi condizionare da eventuali errori dell'analisi che spesso inducono a false giustificazioni.

Prima di applicare la metodologia sopra descritta si suppone di poter assumere l'analisi come lineare; questa è un'ipotesi ragionevole, in quanto si trascurano non linearità che possono essere causate da problemi di contatto o attriti, si considera il materiale omogeneo e isotropo e gli spostamenti sono effettivamente piccoli (come si vedrà in seguito).

Il problema statico sarà affrontato con due approcci differenti: si utilizzeranno in un primo momento elementi monodimensionali (*beam* e *bar*), per poi passare ad un'analisi più completa servendosi di elementi 2D (*shell*). Si è adottato un procedimento sistematico, che parte dalla modellazione del telaio secondo una geometria di supporto adatta per gli elementi considerati; saranno poi da fissare le caratteristiche del materiale quali modulo di elasticità, sezioni e momenti d'inerzia, elementi necessari per la costruzione della matrice di rigidezza della struttura. Le varie geometrie dovranno poi essere assemblate con opportuni vincoli interni e l'intero telaio sarà fissato a terra in modo da evitare di avere un sistema ipostatico o labile; quindi si procederà alla modellizzazione del punto di applicazione e dell'entità dei carichi a cui è soggetta la struttura. Il cuore del metodo starà nella scelta del tipo di elementi e nella realizzazione della griglia secondo opportune tecniche che assicurano il raggiungimento di risultati ottimali. Il modello così ottenuto verrà inviato al solutore FEM che, per mezzo di semplici operazioni matriciali, genererà un output che dovrà essere criticamente esaminato.

In entrambi i casi analizzati per la realizzazione del modello geometrico si sono effettuate importanti semplificazioni: rispetto alle indicazioni di progetto si sono trascurate le piastre di collegamento tra le varie travi, e tale vincolo è stato idealizzato come un incastro perfetto. Anche i raccordi non sono stati modellati, così come pure la travatura che collega le putrelle inferiori. Per quanto concerne i tiranti si è trascurato il precarico; inoltre il collegamento degli stessi con il resto del telaio è stato modellizzato come una cerniera, vincolo che consente all'elemento di lavorare solo in senso assiale. Da notare come l'intero assieme è in equilibrio al suo interno: le forze originate dagli attuatori che si scaricano sulla struttura hanno reazioni uguali e contrarie anch'esse applicate al telaio. Pertanto saranno nulle le reazioni vincolari a terra e la modellazione dei vincoli potrà essere ricondotta ad un semplice incastro in un punto qualsiasi della travatura, che ha l'unico compito di evitare la singolarità della matrice di rigidezza.

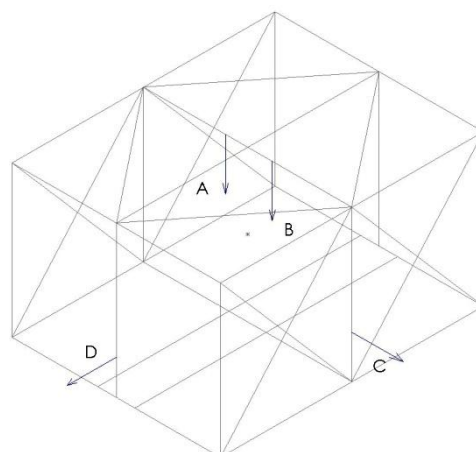
Taluni assunti saranno esplicitati nell'analisi con elementi *beam*, ma saranno validi anche per gli elementi *shell*. Non sono possibili ulteriori semplificazioni relative al metodo, come la possibilità di sfruttare simmetrie, in quanto sebbene siano riscontrabili pattern regolari nella geometria, i carichi hanno una disposizione asimmetrica.

Sarebbe possibile un'ulteriore modellazione, che prevede l'impiego di elementi solidi tridimensionali; tale scelta è però opinabile, in quanto l'obiettivo dell'analisi è la ricerca del comportamento di massima del telaio, non si ha la pretesa di indagare i particolari della struttura quali giunti e piastre di collegamento (che non saranno neppure modellati); oltretutto l'introduzione di elementi *brick* porterebbe limitati benefici a fronte di una netta e inutile complicazione del problema dal punto di vista computazionale.

Scopo dell'analisi statica non sarà tanto quello di evidenziare la resistenza meccanica della struttura (che sarà abbondantemente soddisfatta), quanto quello di verificare che deformazioni e spostamenti del telaio rimangano limitati, di modo da assicurare che il banco prova possa adempiere alla sua funzione.

Sono assegnate le seguenti configurazioni di carico che saranno analizzate nel prosieguo:

caso	A [kN]	B [kN]	C [kN]	D [kN]
1	250	250	150	100
2	250	-250	150	100
3	250	250	-150	-100



Per quanto riguarda l'analisi dinamica, si indagheranno le prime frequenze proprie della struttura. È infatti di essenziale importanza accertarsi che gli attuatori lavorino fuori dal campo di risonanza e che quindi non inducano vibrazioni amplificate nel telaio. Poiché si assume linearità nel modello, per il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti, ciascuna delle quattro forzanti potrà essere considerata singolarmente. Si suppone che il range di frequenze coperto dagli attuatori idraulici vada dal carico pressoché statico fino a un massimo di 30 *Hz*.

Per lo studio del problema ci si servirà del software *Abaqus*, suite che, oltre al solutore vero e proprio, mette a disposizione il pre-processore e post-processore grafico *Abaqus CAE* per la definizione del modello e la visualizzazione dei risultati. Verrà utilizzato un sistema di unità di misura coerente considerando il *mm* per le lunghezze e il *N* per le forze.

Analisi statica: elementi monodimensionali

Nel continuo un problema strutturale è descritto da equazioni differenziali alle derivate parziali; per potere applicare il FEM si discretizza il problema per giungere alla seguente formulazione lineare

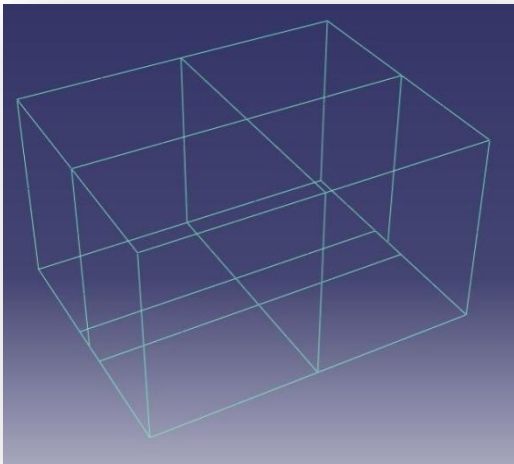
$$[K]\{u\} = \{F\}$$

in cui $[K]$ è la matrice di rigidezza $\{u\}$ e $\{F\}$ rispettivamente spostamenti e forze nodali. Il software innanzitutto costruisce la matrice di rigidezza con un approccio formale

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

dove $[B]$ è la matrice che contiene le derivate parziali delle funzioni di forma tipiche dell'elemento considerato, e $[E]$ è la matrice costitutiva che comprende le caratteristiche di geometria e materiale della sezione.

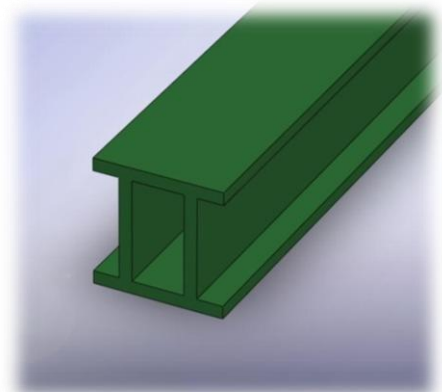
Dopodiché si passa alla risoluzione del sistema, ovvero tramite tecniche numeriche calcola la matrice $[K]^{-1}$, date le condizioni al contorno (forze e vincoli noti); calcolati gli spostamenti nodali, le deformazioni e gli sforzi sono facilmente derivabili tramite le opportune relazioni. Per estendere la soluzione a tutto il dominio dell'elemento si introducono le funzioni di forma, polinomi interpolanti i nodi che ipotizzano un andamento (tipicamente lineare o quadratico) delle grandezze calcolate.



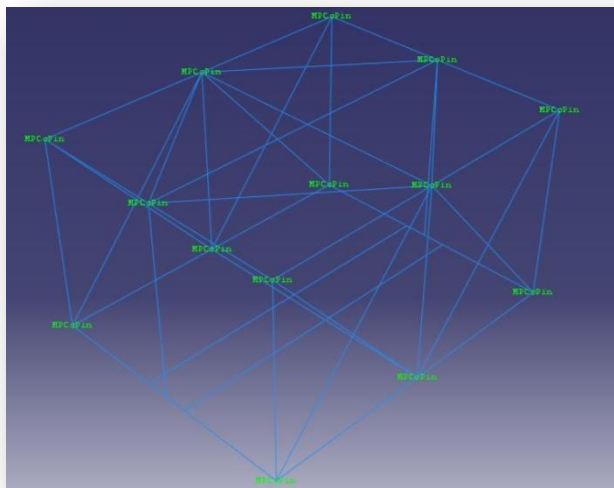
Il modello

In base a quanto esposto precedentemente si è proceduti alla realizzazione del supporto geometrico per l'utilizzo di elementi finiti 1D. Sebbene questi abbiano una sola dimensione preponderante rispetto alle altre due, è possibile comunque orientarli nello spazio per risolvere un problema 3D come quello in esame. L'assieme è composto da 3 parti più semplici: il telaio vero e proprio, costituito dai tre portali e dai longheroni trasversali, che formano una travatura assemblata solamente tramite incastri; e i due tipi di tiranti che collegano i vertici della struttura.

Le travi vengono pertanto schematizzate con la propria linea d'asse; le ulteriori informazioni geometriche necessarie per la costruzione della matrice di rigidezza, sono quelle relative al materiale (per l'acciaio il modulo di Young vale 206 GPa , mentre il coefficiente di Poisson è pari a 0.3) e alla sezione (in particolare area e momenti d'inerzia). Devono quindi essere analizzati i singoli profili; mentre per sezioni standard come quella circolare dei tiranti, o quella a C, *Abaqus* predispone semplici interfacce di definizione, per il profilo in figura si è proceduti al calcolo manuale delle caratteristiche (per mezzo di semplici considerazioni sulla geometria delle aree). Da notare che il momento polare calcolato non include nessun coefficiente cor-



rettivo; pertanto i risultati risentiranno di questa approssimazione per quanto riguarda le rotazioni e i momenti torcenti. Dopo aver associato le varie sezioni al corrispettivo elemento, è importante definire la corretta orientazione con cui il profilo è disposto secondo il proprio sistema di coordinate locali.



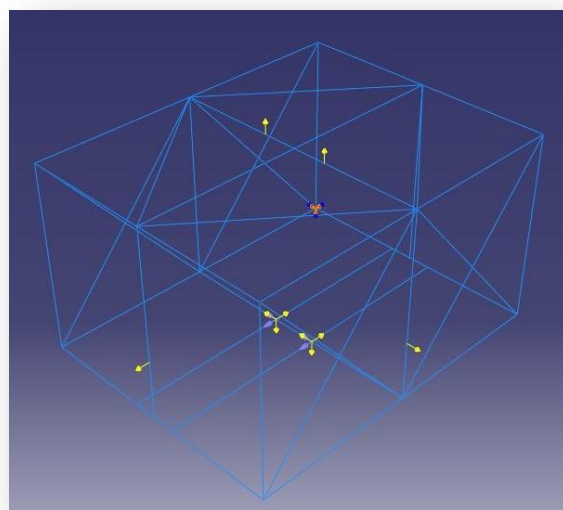
I vincoli

Si procede quindi ad assemblare le 3 parti geometriche; la doppia bullonatura che collega i tiranti al resto del telaio è schematizzata come una cerniera; per collegare i due elementi geometrici ci si serve della tecnica del *Multi Point Constraint*. Essa consiste nell'imposizione di un legame tra i gradi di libertà di due nodi della struttura, in questo caso i capi dei tiranti e i vertici del telaio; nella fattispecie si è utilizzato un vincolo *pin*, che il software interpreta come un'equazione che impone ai tiranti gli spostamenti dei nodi *master*, mentre lascia svincolate le rotazioni.

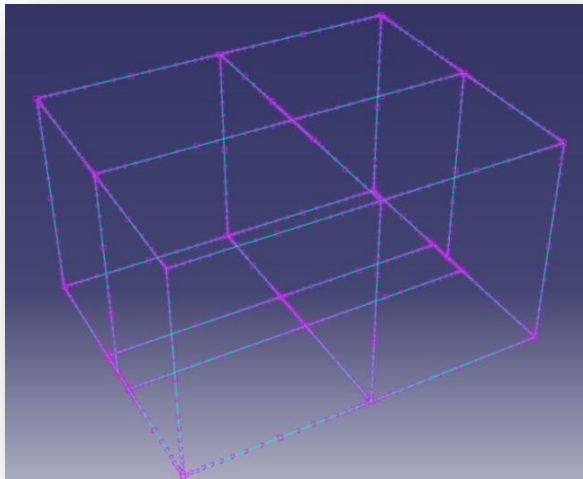
Come spiegato in precedenza tutte le forze considerate si scaricano internamente alla struttura, pertanto i vincoli a terra non influiscono sull'analisi; sono però indispensabili perché la matrice di rigidezza nell'equazione risolutiva non sia singolare. Viene quindi posto un incastro in corrispondenza di un nodo del telaio, situato in una posizione lontana da quella di maggiore sollecitazione, di modo da prevenire comunque eventuali influenze sul resto della struttura.

I carichi

Per i punti di applicazione dei carichi si sono realizzate delle partizioni del modello geometrico, di modo che essi coincidano con un nodo della mesh che verrà applicata. Oltre alle quattro forze imposte degli attuatori, si mettono in luce anche le reazioni che l'eventuale elemento ferroviario da testare scaricherà sul telaio. La struttura si troverà pertanto in equilibrio; per semplicità si sono calcolate le reazioni nei punti di incrocio tra il profilo longitudinale inferiore e il trasverso centrale inferiore. Imponendo le equazioni cardinali della statica si ricava che in tali nodi nasceranno le seguenti reazioni (opportunamente convertite in unità di misura coerenti):



	A[kN]	B[kN]	C[kN]	D[kN]	R1 [kN]			R2 [kN]			M1[kNm]		M2[kNm]	
direzione	y	y	x	z	x	y	z	x	y	z	x	z	x	z
1	250	250	150	100	-75	-250	-50	-75	-250	-50	-88	132	-88	132
2	250	-250	150	100	-75	-250	-50	-75	250	-50	-88	132	-88	132
3	250	250	-150	-100	75	-250	50	75	-250	50	88	-132	88	-132

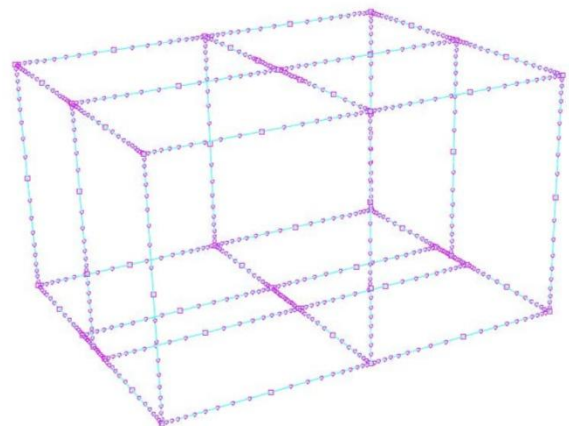


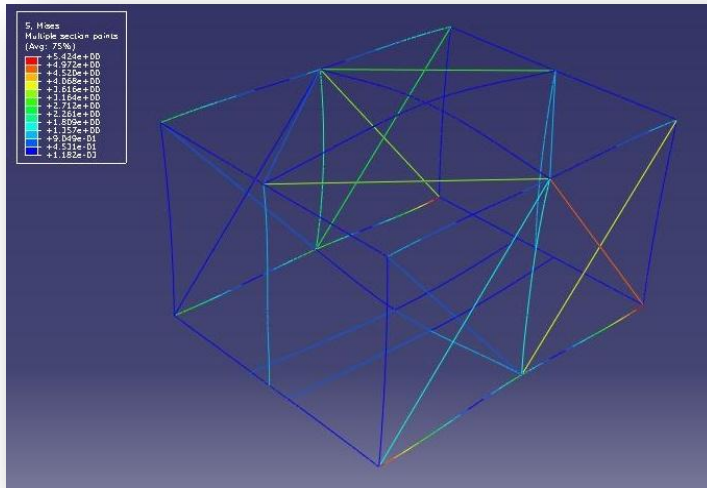
La mesh

Nell'analisi vengono utilizzati due diversi tipi di elementi finiti monodimensionali. Poiché i tiranti lavorano solo a trazione non è necessario utilizzare il modello di trave che contempla anche flessioni, torsioni e tagli, ma ci si può limitare a considerare la sola azione assiale; gli elementi più adatti sono perciò le *bar*: verrà utilizzato un solo elemento con formulazione lineare per ciascun tirante, onde evitare la nascita di problemi dovuti a errori numerici che portano a "sporcare" i carichi nei nodi con la presenza di forze che non sono solo puramente assiali.

Nel resto della struttura invece si utilizzano i più appropriati elementi *beam*, che descrivono la trave nella formulazione completa. Poiché la geometria è orientata nello spazio, ciascun nodo presenta 6 gdl (3 traslazioni e 3 rotazioni). In questo caso si è optato per una migliore interpolazione servendosi di funzioni di forma quadratiche (oltre ai due estremi dell'elemento si considera anche il punto medio).

Più sono piccoli gli elementi finiti meglio si approssima il continuo; d'altro canto l'incremento del numero di nodi porta a un drastico aumento del tempo di calcolo, non sempre ammissibile. Nell'operazione di meshatura si cercherà pertanto un compromesso tra precisione della descrizione del modello e carico computazionale. In questo caso, per ottimizzare i risultati si è adoperata una particolare tecnica di infittimento della mesh; dopo una prima e superficiale analisi per identificare i punti maggiormente sollecitati, si è scelto di aumentare la densità dei nodi solo in tali regioni. In questo modo è possibile descrivere picchi di sforzo caratterizzati da alti gradienti senza dover infittire l'intero modello, evitando così un approccio molto più oneroso in termini di tempi di calcolo. Di particolare interesse sono le zone che presentano discontinuità geometriche, come i vertici del telaio, e i punti di applicazione dei carichi. Per rendere più omogeneo l'infittimento si è applicata la cosiddetta tecnica del *bias*, che consiste nel distribuire i nodi della mesh secondo una progressione geometrica, come si denota nello screenshot in questa pagina.





Analisi dei risultati

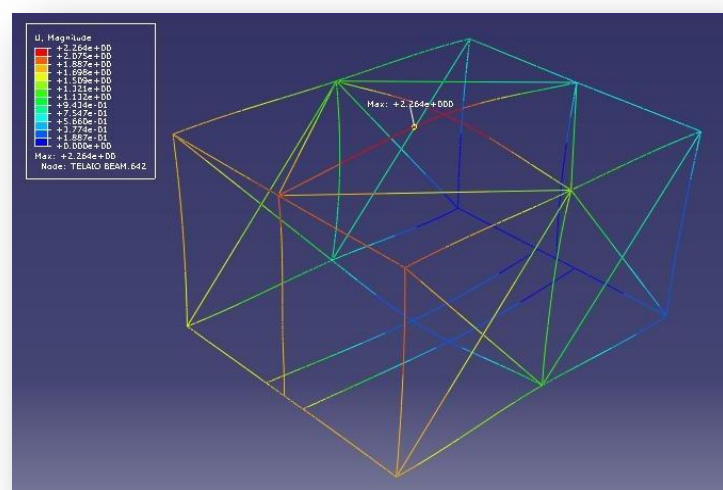
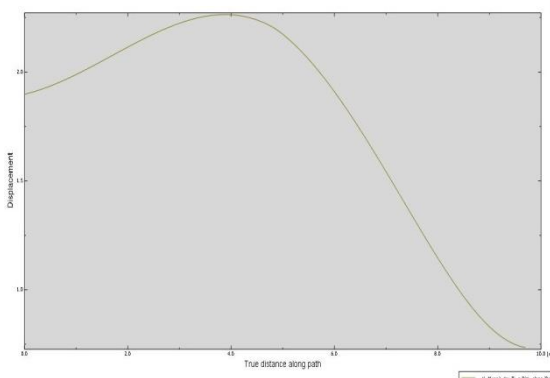
Caso 1

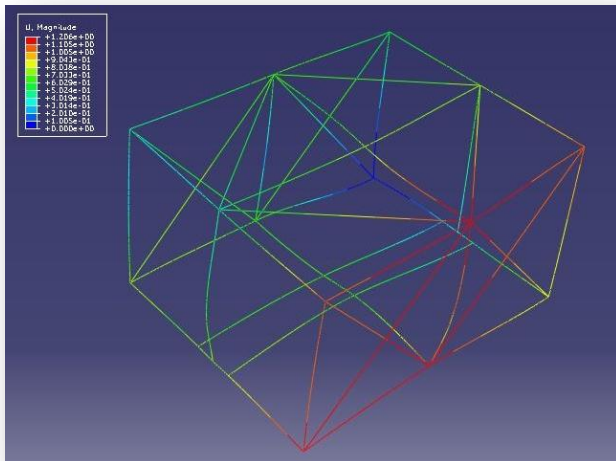
Il grafico degli sforzi nel caso in esame è poco significativo, poiché, avendo definito un profilo custom, il software non è in grado di determinare automaticamente il punto di maggiore sollecitazione della sezione; in figura è evidenziato lo stato di sforzo (sforzo di confronto di von Mises) sulla linea d'asse delle particolari travi a doppia T, che difficilmente corrisponderà a

quello più grande. L'entità massima dello sforzo calcolato è pari a $\sigma_{max} = 5.4 \text{ MPa}$, rilevata nei pressi dei profili longitudinali laterali; come anticipato tale valore è abbondantemente al di sotto del limite di snervamento del materiale (355 MPa), ma in tale analisi la criticità della configurazione si avrà ben prima del raggiungimento dei limiti strutturali del telaio. Ciò che si vuole verificare è che i carichi non generino spostamenti così elevati tali che potrebbero inficiare il corretto funzionamento della struttura come banco prova; ovviamente il telaio dovrà deformarsi il meno possibile, e sicuramente in misura alquanto ridotta rispetto all'elemento sottoposto al test.

La visualizzazione della configurazione deformata e i relativi spostamenti, è invece fonte di maggiore interesse: il punto di massimo è localizzato sul traverso superiore, che ha uno spostamento di $u_{max} = 2.264 \text{ mm}$. Tale limite è sicuramente tollerabile e non compromette in maniera rilevante la funzione di elemento rigido del telaio di contrasto.

Questi risultati saranno utili termini di confronto per la successiva analisi con elementi piani *shell*. Nel grafico seguente è plottato lo spostamento del traverso superiore:



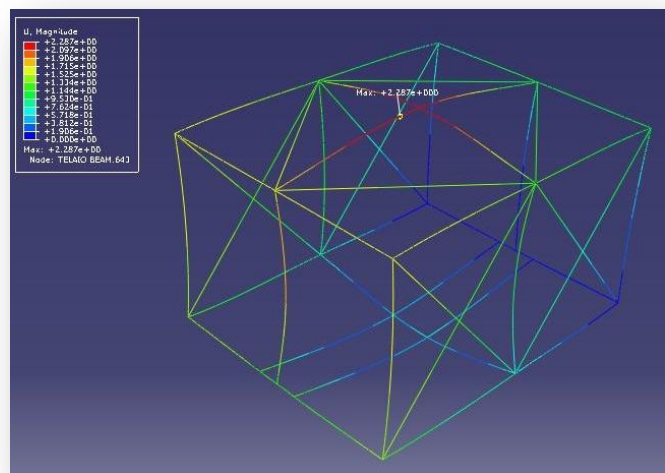


Caso 2

Visualizzando la configurazione deformata si nota come lo spostamento massimo, nel caso che le forze impresse dagli attuatori verticali abbiano verso discorde, è diminuito a $u_{max} = 1.2 \text{ mm}$ e si è spostato nella parte laterale del telaio; da notare anche che i profili centrali assumono una deformata con due punti di flesso.

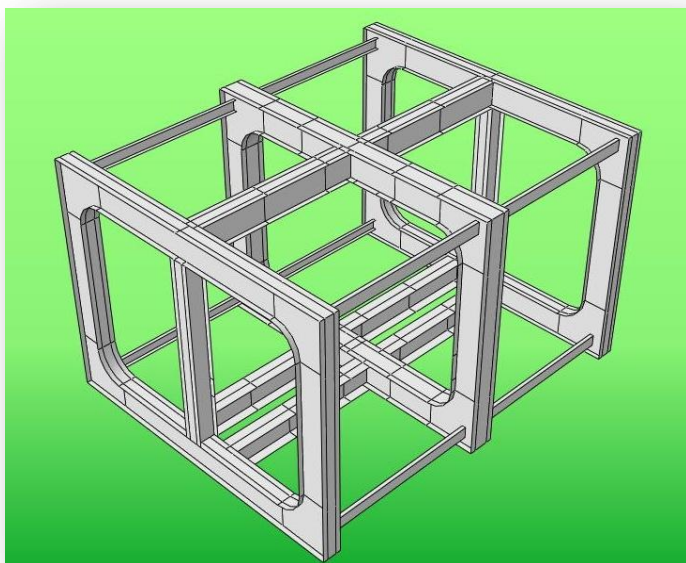
Caso 3

Considerando le due forze orizzontali nella direzione opposta ai casi precedenti, gli spostamenti rimangono accettabili, presentando un picco sempre in corrispondenza del profilo superiore di $u_{max} = 2.29 \text{ mm}$. La deformata è molto simile al caso 1, se non per la diversa concavità dei montanti laterali.



Come citato in precedenza, il metodo a elementi finiti è un metodo numerico approssimato; i risultati devono perciò essere attentamente sottoposti a un'analisi critica. A tal proposito un aiuto è dato dal software, che non ha rilevato messaggi di errori o *warning* dovuti a imprecisioni o dimenticanze nella definizione del modello geometrico o a distorsione degli elementi. Nella fase di post-processing si evince che i risultati evidenziati in precedenza sono sicuramente verosimili; ciò esclude errori grossolani, dovuti ad esempio a incongruenza tra unità di misura. Anche la deformata qualitativa, rappresentazione di come sta lavorando il telaio, si atteggia in modo plausibile. Non si denotano inoltre singolarità numeriche sospette o lacerazioni e compenetrazione degli elementi. Ulteriore conferma della correttezza del modello, la si può trovare nelle reazioni vincolari che, come effettivamente ci si aspetta, sono nulle nell'incastro a terra.

Analisi statica: elementi shell



Il modello

La particolare conformazione delle travi del telaio in esame, rendono confacente l'utilizzo di elementi 2D come le *shell* per modellizzare le lastre di cui sono composte, dato che sono elementi finiti il cui spessore è molto minore rispetto alle altre due dimensioni. È perfino più conveniente dell'impiego di elementi solidi, poiché questi, oltre a introdurre un notevole incremento di gradi di libertà, causerebbero un malcondizionamento del sistema risolutivo. Il supporto geometrico è costituito da piani bidimensionali che vanno a formare l'ossatura della trave; si constata che non viene modellato lo

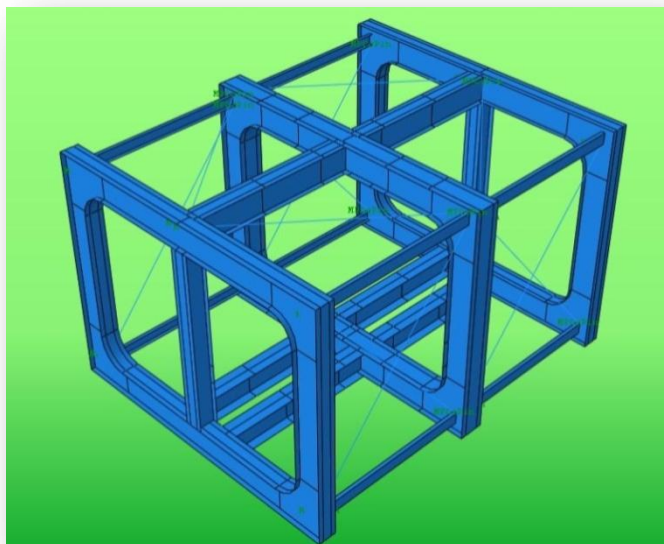
spessore, in quanto esso è una proprietà dell'elemento e non della geometria. L'assieme è stato suddiviso ancora una volta in 3 singole parti che andranno poi assemblate: per il telaio vero e proprio si sono modellate appunto geometrie bidimensionali, mentre per i tiranti si sono mantenute geometrie 1D in modo del tutto analogo al caso precedente.

Le proprietà del materiale sono quelle relative all'acciaio (il modulo di Young vale $E = 206 \text{ GPa}$ e il coefficiente di Poisson $\nu = 0.3$). Per l'assegnazione delle caratteristiche fisiche bisogna porre attenzione al verso della normale uscente dal piano geometrico, che fissa il sistema di riferimento locale per l'elemento (superfici *top* e *bottom*); in tale modo è possibile attribuire uno spessore alla *shell* e contemporaneamente stabilire se essa giace a cavallo del piano modellato o si discosta dal piano medio con un certo offset. Il software sarà in grado poi di utilizzare diversi punti di integrazione lungo questo spessore.

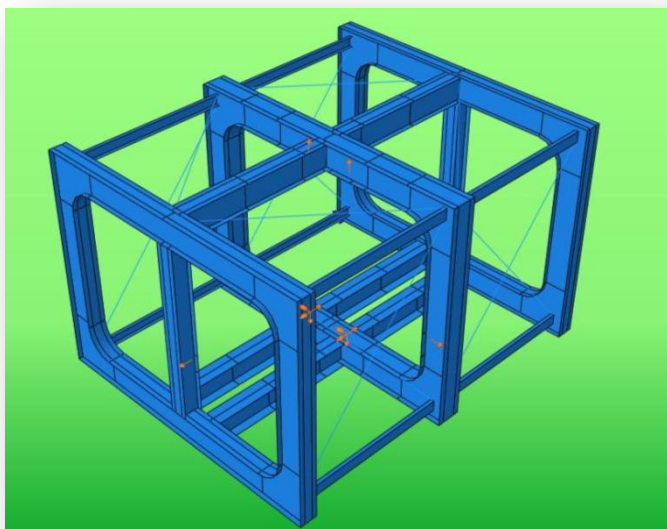
Per quanto riguarda i tiranti, dopo averne definito la geometria per mezzo di uno *wire*, si associano le caratteristiche del materiale e il profilo circolare all'asta similmente a quanto fatto nel modello con elementi monodimensionali.

I vincoli

Come spiegato in precedenza tutte le forze si scaricano all'interno della struttura; pertanto basterà fissare tutti i 6 gradi di libertà di un punto qualsiasi del telaio per garantire che il solutore non lavori con una matrice singolare.



Per i vincoli interni, ovvero per le cerniere tra il telaio e i tiranti, si utilizzerà nuovamente la tecnica MPC, creando un *pin* nel punto di giunzione. Da osservare che in questa maniera si mettono in collegamento due elementi di tipo diverso; in particolare bisogna avere l'accortezza che il punto *master* della *shell* coincida con un nodo della mesh, mentre sicuramente il punto *slave* essendo un estremo del tirante sarà anche un nodo per l'elemento *bar*.

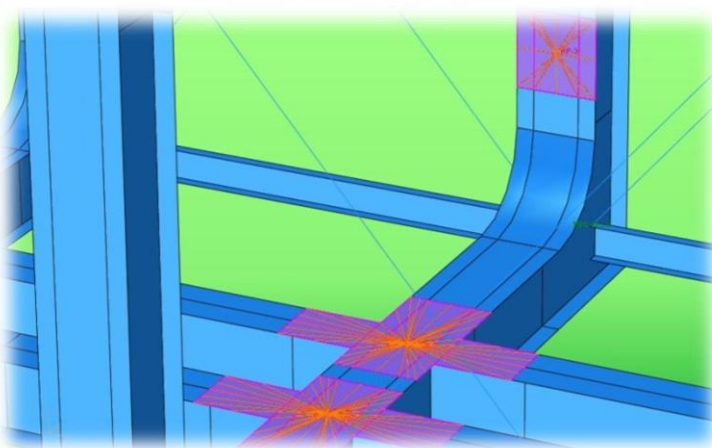


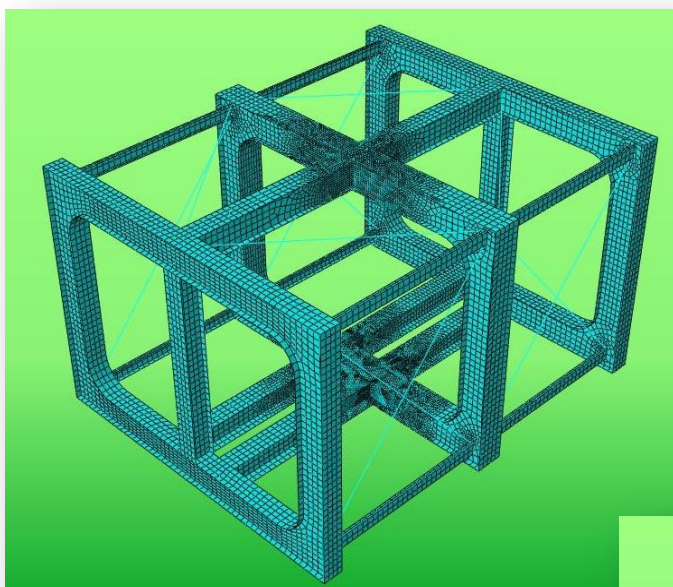
I carichi

Nell'analisi del modello *shell*, si considera la prima configurazione di carico; le reazioni saranno leggermente diverse rispetto al caso precedente, poiché ora le forze degli attuatori si scaricano sulla superficie del profilato e non vengono più idealizzate come agenti sulla linea d'asse. Si ipotizza ancora che i carichi si distribuiscano in modo simmetrico nei due punti inferiori del profilo centrale:

	A[kN]		B[kN]		C[kN]		D[kN]		R1 [kN]			R2 [kN]			M1[kNm]		M2[kNm]	
direzione	y		y		x		z		x	y	z	x	y	z	x	z	x	z
	250		250		150		100		-75	-250	-50	-75	-250	-50	-70.5	105.75	-70.5	105.75

Sebbene i calcoli delle reazioni (ottenute con semplici equazioni di equilibrio statico) siano stati eseguiti considerando l'applicazione delle stesse in maniera puntuale, la realtà del problema è ben diversa: le forze sono idealmente concentrate in un punto e tale valore viene dato come input al software, ma la superficie su cui si scaricano non è infinitesima. Per descrivere questo aspetto della modellazione si è utilizzata la tecnica del *coupling*: essa permette di distribuire la forza applicata in un punto di controllo su una superficie piana di estensione finita. Così facendo si sono distribuite in modo uniforme le azioni degli attuatori su di un'area praticamente simile a quella delle relative piastre di collegamento, e le reazioni sul piano inferiore del telaio.





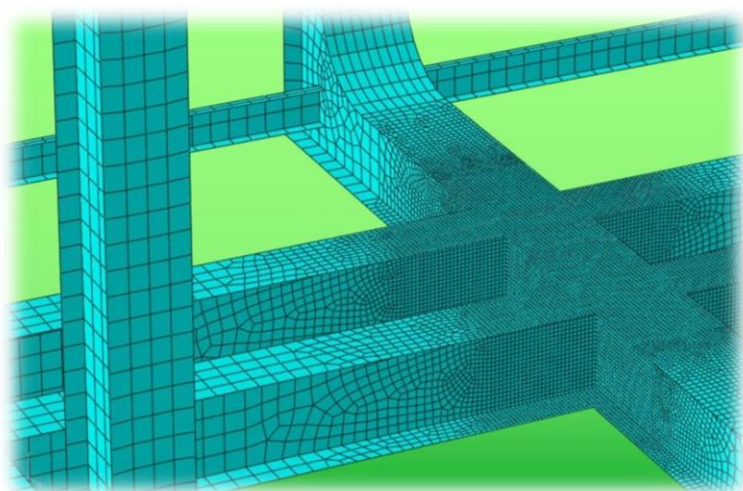
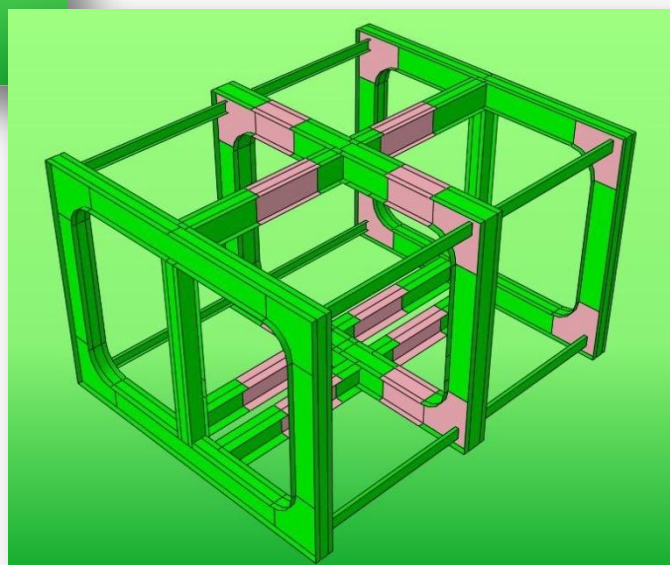
La mesh

Per quanto concerne l'applicazione della mesh sui tiranti si è operato nella medesima maniera del caso monodimensionale, ovvero si sono utilizzati elementi di tipo *truss*, in particolare un solo elemento lineare per ogni geometria.

Discorso più complesso è quello relativo agli elementi *shell*. Innanzitutto si sono create opportune partizioni sulla geome-

tria di supporto, utili per poter applicare la mesh in maniera più uniforme e per sfruttare nel migliore dei modi le tecniche di infittimento.

Quindi per ciascuna di queste partizioni è stata assegnata una tecnica di meshatura: è sempre da preferire un tipo di griglia strutturata (di colore verde nella figura a fianco) in quanto limita le distorsioni degli elementi; un innegabile aiuto ci viene dato dalla formulazione isoparametrica degli elementi piani, che permette di applicare mesh con topologia semplice anche su superfici curve, come i raccordi dei portali. Le uniche zone in cui si preferisce usare una *free mesh* (le parti in rosa nell'immagine) sono quelle con discontinuità geometriche, quali ad esempio i punti di incastro dei profili longitudinali laterali. Anche altre parti saranno predisposte a una griglia libera, necessaria per adattare elementi di passaggio, come sarà descritto in seguito.



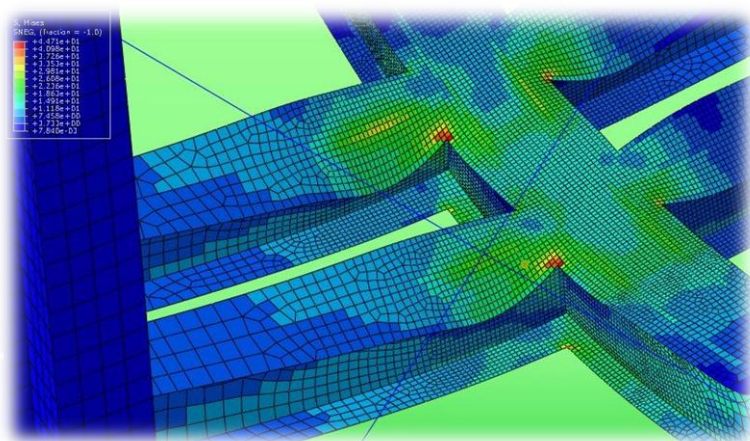
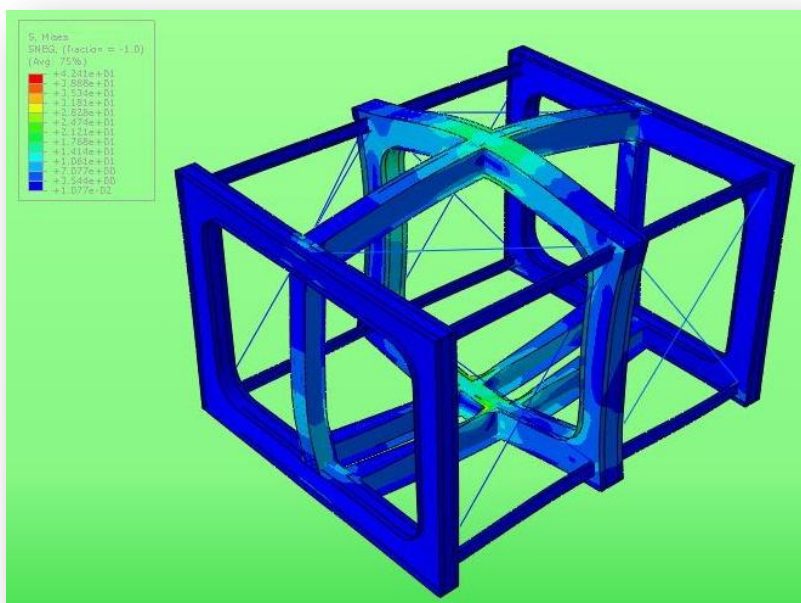
Il tipo di elemento utilizzato sarà quello di *shell* rettangolari a quattro nodi (funzioni di forma lineari, integrazione ridotta per evitare problemi numerici e la sovrastima della rigidità del modello), preferiti a quelle quadratiche a 8 nodi per velocizzare i tempi di calcolo e poiché quest'ultimi non consentono di rappresentare alcuni stati di deformazione costante.

Anche l'uso delle *shell* si presta per l'applicazione della tecnica del *bias*; anziché infittire indistintamente tutte le zone

del modello, si è raffinata la mesh nei punti a maggior sollecitazione (nel profilo centrale), di modo da poter cogliere completamente il gradiente di sforzo e deformazione. In questo caso però tale tecnica andrà applicata in due dimensioni. Per connettere due zone a densità di elementi diversa, si deve ricorrere a una zona intermedia costituita da una *free mesh*, che sacrifica la regolarità di una griglia strutturata per consentire l'applicazione di elementi di passaggio che vanno via via infittendosi senza introdurre lacerazioni.

Analisi dei risultati

Dal contour plot degli sforzi si nota come sul profilo centrale si rilevano gli sforzi più elevati; in particolare si ha un valore limite $\sigma_{max} = 42.41 \text{ MPa}$. Questo picco è però da attribuire alla discontinuità geometrica della travatura, come si denota nella figura sottostante; nel prototipo reale il punto d'incontro tra le due travi è raccordato, così che sicuramente non si avrà l'effetto di intaglio derivante dallo spigolo vivo.

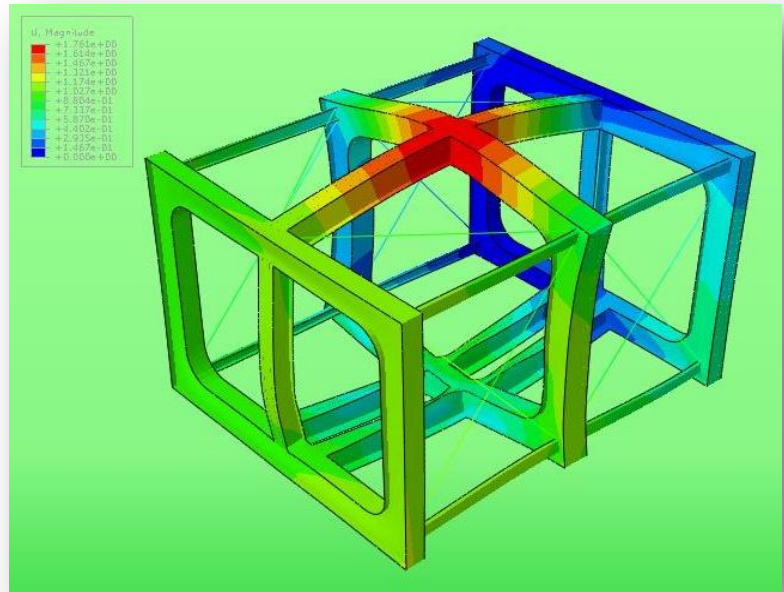


In tali punti si evince come il gradiente di sforzo è elevato (nell'immagine sono rappresentati i valori non mediati ai nodi della sezione *bottom*). Sono pertanto risultati da scartare; il resto del telaio è sottoposto a sforzi ben più modesti, che solo nella zona di applicazione dei carichi superano i 20 MPa , valori che di certo non mettono il telaio in condizioni di resistenza critica.

Di maggiore importanza, come ampiamente giustificato in precedenza, sono i risultati numerici relativi agli spostamenti; la deformata è del tutto analoga a quella della configurazione trattata con elementi finiti 1D. Poiché caricato con le forze di entità più elevata, il profilo centrale risulta quello maggiormente sollecitato: si ha uno spostamento massimo di $u_{max} = 1.761 \text{ mm}$. Tale valore non è molto distante da quello ricavato dall'analisi precedente; teoricamente l'approccio 2D dovrebbe meglio interpretare la realtà, in quanto si serve di un modello più complesso, che nel caso delle *shell* descrive molto bene le tre dimensioni di una

trave, avvicinandosi al caso reale. Si può quindi concludere con sufficiente grado di fiducia che gli spostamenti non compromettono la funzione della struttura come telaio di contrasto.

Una analisi critica finale, premesso che il software non ha segnalato errori o *warning*, ci porta nuovamente a concludere che i risultati numerici e la deformata sono plausibili. I contour plot sono omogenei, a riscontro del buon infittimento della mesh. Anche le reazioni vincolari nell'incastro sono molto basse, segno che il modello ha lavorato come ci si aspettava. È necessario però tener conto degli elevati valore di sforzo riscontrati, dovuti a discontinuità geometriche e alla posizione prossima ai punti di applicazione dei carichi. Sono queste le cause che portano a errori di tipo numerico da cui derivano quindi sovrasollecitazioni da non considerare.



Analisi dinamica

Sebbene l'analisi dinamica dal punto di vista analitico sia totalmente diversa rispetto a quella strutturale, *Abaqus* è in grado di risolvere con un approccio ad elementi finiti il problema della ricerca delle frequenze proprie.

Dalla generica equazione che descrive la dinamica di un sistema

$$[K]\{u\} + [C]\{\dot{u}\} + [M]\{\ddot{u}\} = \{F(t)\}$$

si trascurano le forzanti e si considera il sistema non smorzato (per i problemi strutturali lo smorzamento, sebbene non sia di natura viscosa, è piccolo); imponendo quindi la generica soluzione $\{u\} = \{\bar{u}\} \sin \omega t$ ci si riconduce a un problema agli autovalori:

$$[K - \omega^2 M]\{\bar{u}\} = 0$$

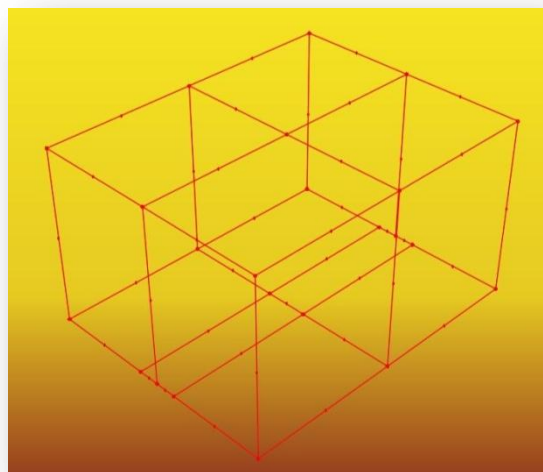
da cui si ricavano le frequenze proprie ω_i^2 e i corrispondenti modi di vibrare $\{u\}_i$ (autovettori).

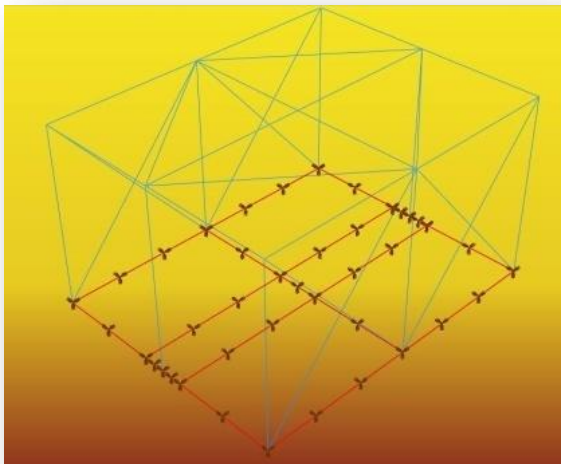
Il numero di frequenze naturali di un corpo è pari a quello dei suoi gradi di libertà; vedendo il problema nel senso opposto, per indagare le prime n frequenze proprie, è necessario suddividere la struttura con elementi tali per cui il numero dei loro gradi di libertà sia n . Ovviamente se gli elementi sono presenti in numero maggiore, è possibile descrivere in modo meno approssimato i modi di vibrare più bassi.

Per l'analisi di una la risposta strutturale bastano i primi modi di vibrare; nel caso in esame considereremo il sottospazio delle prime 5 frequenze proprie.

Il modello

Si è considerato nuovamente il modello costituito da elementi monodimensionali; il procedimento di modellizzazione geometrica è del tutto identico al caso dell'analisi statica: si sono realizzate 3 parti, l'intelaiatura principale e i due tipi di tiranti. Oltre alle caratteristiche di sezione e materiale però, per la costruzione della matrice di massa, *Abaqus* deve ricevere in input la densità dell'acciaio ($\rho = 7.8 \text{ kg dm}^{-3}$, da trasformare in unità di misura coerenti con il N e il mm).





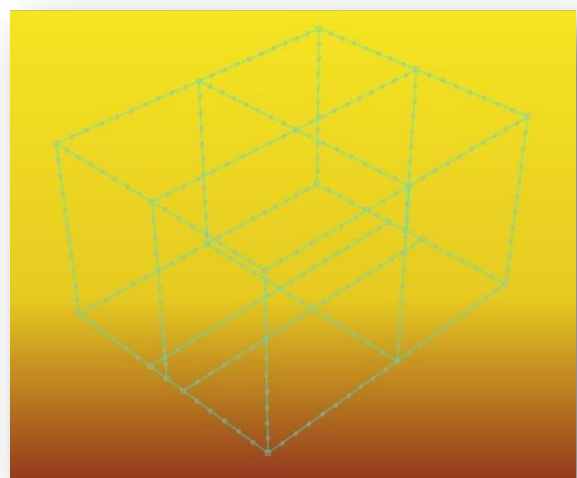
I vincoli

Una volta assemblate le tre parti grazie alla tecnica del *Multi Point Constraint* (in proposito si veda l'analisi strutturale), il modello deve essere vincolato a terra. Per simulare il contatto del telaio con il basamento in ghisa, si assume che tutte le travi inferiori siano incastrate a terra.

Da evidenziare il fatto che nella ricerca delle frequenze proprie il sistema deve essere libero, pertanto ogni elemento del telaio è totalmente scarico.

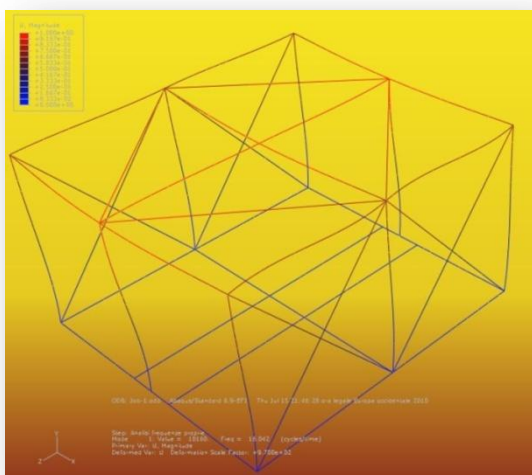
La mesh

In questo caso si è generata una griglia uniforme, dato l'assenza di forze o punti singolari nel modello. Gli elementi utilizzati sono delle *beam* con formulazione parabolica per il telaio principale e *bar* lineari per i tiranti. I gradi di libertà dei nodi sono di certo più che sufficienti per la ricerca delle prime 5 frequenze proprie.



Analisi dei risultati

Di seguito sono riportati i modi di vibrare per ciascuna delle prime 5 frequenze proprie:

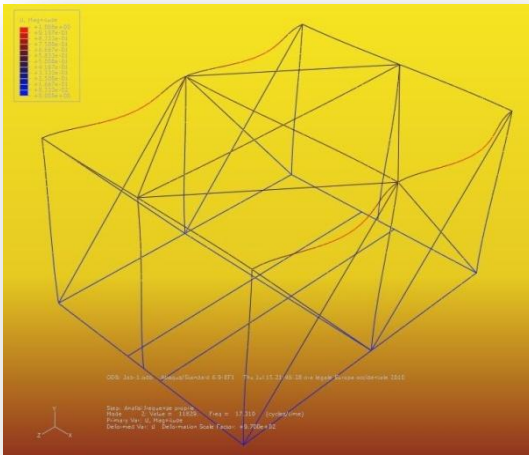


1 modo di vibrare

$$\omega_1^2 = 10160 \text{ s}^{-2}$$

$$f_1 = 16.042 \text{ Hz}$$

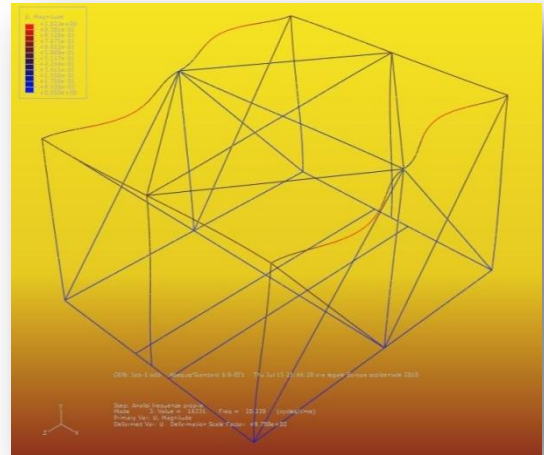
È la frequenza di maggiore interesse, poiché è la più piccola frequenza per cui la struttura entra in risonanza.



II modo di vibrare

$$\omega_2^2 = 11829 \text{ s}^{-2}$$

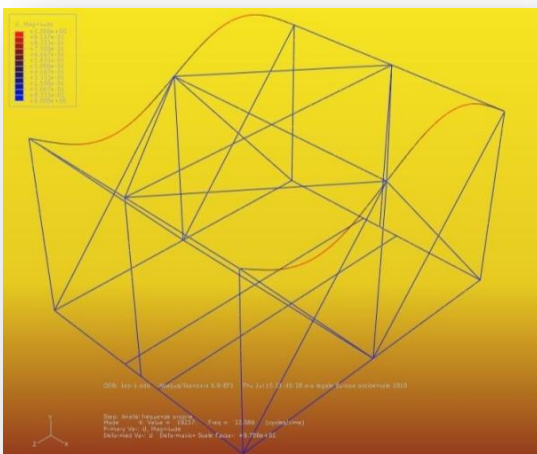
$$f_2 = 17.310 \text{ Hz}$$



III modo di vibrare

$$\omega_3^2 = 16331 \text{ s}^{-2}$$

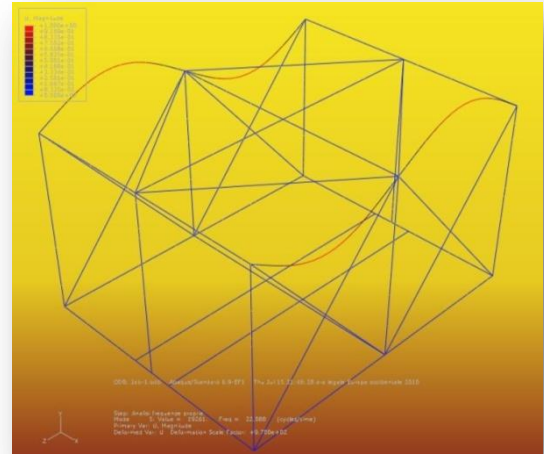
$$f_3 = 20.339 \text{ Hz}$$



IV modo di vibrare

$$\omega_4^2 = 19257 \text{ s}^{-2}$$

$$f_4 = 22.086 \text{ Hz}$$



V modo di vibrare

$$\omega_5^2 = 19261 \text{ s}^{-2}$$

$$f_5 = 22.088 \text{ Hz}$$

È da tener presente che le frequenze proprie calcolate sono stime per eccesso di quelle reali (ovvero infittendo la mesh si ha convergenza dall'alto). Ipotizzando che il campo di impiego degli attuatori idraulici non superi i 30 Hz, si deduce che per arrivare a frequenze superiori ai 16 Hz la struttura entra in un campo di risonanza. Si dovrà pertanto evitare di lavorare a tali regimi, altrimenti si indurrebbero nella struttura pericolose vibrazioni che potrebbero minare la funzionalità della stessa.

Validazione dei risultati

È possibile verificare direttamente la bontà dei risultati ottenuti nei due tipi di analisi; lo strumento principe per la validazione di un modello a elementi finiti è una prova sperimentale. Poiché un prototipo del telaio è effettivamente stato realizzato, sarebbe possibile ricavare delle misure dallo stesso, sottoponendolo alle varie sollecitazioni e comparando i risultati sperimentali con quelli numerici. Ad esempio si potrebbero incollare sulla struttura vari estensimetri o rosette che darebbero misure di deformazione e quindi di sforzo locale, come conseguenza dell'applicazione di carichi attraverso gli attuatori. O per verificare le frequenze proprie del telaio, si potrebbero fissare dei servoaccelerometri e poi eccitare la struttura con un urto (impulso) o con degli eccitatori armonici (sweep in frequenza).